

MATEMATIKA

vyšší úroveň obtížnosti

MAMVD11C0T03

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

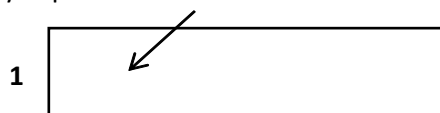
- Didaktický test obsahuje 23 úloh.
- Časový limit pro řešení didaktického testu je uveden na záznamovém archu.
- Povolené pomůcky: psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulačtor bez grafického režimu.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Za nesprávnou nebo neuvedenou odpověď se body neodečítají.
- Odpovědi píšete do záznamového archu.
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–12) tvoří úlohy otevřené.
- Ve druhé části (úlohy 13–23) jsou uzavřené úlohy, které obsahují i nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je právě jedna odpověď správná.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte modrou nebo černou propisovací tužkou, která píše dostatečně silně a nepřerušovaně.
- U úloh, kde budete rýsovat obyčejnou tužkou, obtáhněte čáry a křivky následně propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

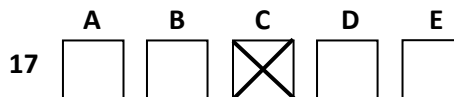
- Výsledky píšete čitelně do vyznačených bílých polí.



- Je-li požadováno řešení, uveďte kromě výsledku celý postup řešení.
- Zápisy uvedené mimo vyznačená bílá pole nebudou hodnoceny.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově запиšte správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, zabarvíte pečlivě původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačíte křížkem do nového pole.

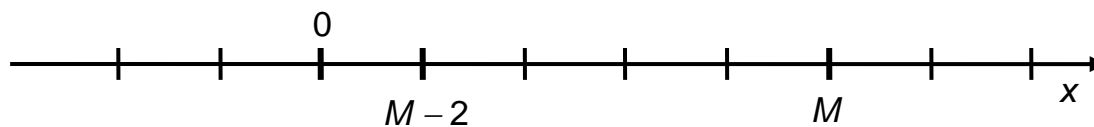


- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.
- Pokud zakřížkujete více než jedno pole, bude vaše odpověď považována za nesprávnou.

Testový sešit neotvírejte, počkejte na pokyn!

VÝCHOZÍ SITUACE A OBRÁZEK K ÚLOHÁM 1 A 2

Na číselné ose jsou vyznačeny obrazy neznámých čísel $M - 2$ a M a dále obraz čísla 0.



1 Na číselné ose vyznačte obraz čísla 1. 1 bod

2 Určete hodnotu čísla M . 1 bod

3 Součin dvou kladných čísel je 100. Zvětšíme-li první o polovinu jeho hodnoty a druhé zmenšíme o 10, součin se nezmění. max. 2 body
Určete obě původní čísla.

1 bod

- 4 Maximálně zjednodušte výraz s proměnnou $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$:

$$\frac{x+1}{\frac{1}{x}+1} =$$

1 bod

- 5 Z předpisu vyjádřete proměnnou x pro všechny reálné hodnoty parametru a , kde $a \neq 0,5$:

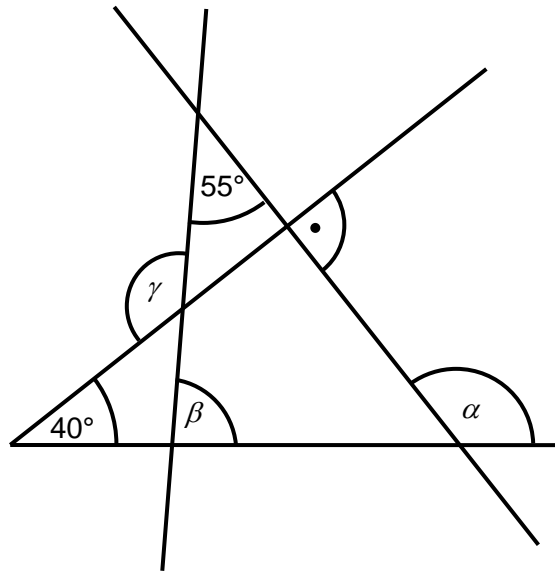
$$x - 2a = 2ax$$

max. 2 body

- 6 Vypočtěte výraz obsahující imaginární jednotku i a výsledek uveďte v algebraickém tvaru:

$$4i^2 \cdot (i+1)^2 \cdot (i+1)^{-3} =$$

VÝCHOZÍ OBRÁZEK K ÚLOZE 7



max. 2 body

- 7 Vypočtete velikosti úhlů vyznačených v náčrtku.

Výsledky uveďte v pořadí α, β, γ .

max. 2 body

- 8 Odchylka přímky $p: 6x + ty - t = 0$ od souřadné osy x je 60° .

Určete hodnotu t v rovnici přímky p (najděte všechna řešení).

max. 2 body

9 Uveďte všechna řešení rovnice v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$:

$$1 - \sin^2 x = (1 - \cos x)^2$$

VÝCHOZÍ TABULKA K ÚLOZE 10

Předpis funkce: $y = a^x$	f_I	f_{II}	f_{III}
Základ $a > 0$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$		$\frac{9}{5}$
Hodnota proměnné x	-2	$\frac{1}{4}$	
Hodnota funkce y		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

max. 3 body

10 V tabulce jsou uvedeny tři různé exponenciální funkce f_I , f_{II} a f_{III} s předpisem $y = a^x$, kde $a > 0$. V každém sloupci je pro danou funkci uveden základ a , dále hodnota proměnné x a hodnota funkce y v tomto bodě.

U každé funkce doplňte chybějící údaj.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 11

Firma si každoročně pronajímá na celý rok kanceláře ve dvou různých objektech. Pronájem kanceláří v prvním objektu stojí měsíčně 35 tisíc korun. Druhý objekt si tentokrát firma udrží jen čtyři měsíce, neboť v rámci úsporných opatření musí ušetřit pětinu z prostředků vyčleněných na běžné celoroční nájem.

(CERMAT)

max. 4 body

11 Kolik korun firma na nájmech tentokrát ušetří?

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení úlohy včetně popisu neznámých nebo objasnění důležitých kroků postupu.

max. 4 body

- 12** Nekonečná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $n \in \mathbf{N}$, je určena prvním členem $a_1 = 2$ a rekurentním vztahem:

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n}$$

- 12.1 Určete další tři členy posloupnosti.
- 12.2 Členy se periodicky opakují. Vypočtěte součet prvních padesáti členů (s_{50}).
- 12.3 Jaký by musel být první člen a_1 , aby byl třetí člen nulový ($a_3 = 0$)?

V záznamovém archu uveďte celý postup řešení a důležité kroky zdůvodněte.

Každou z následujících úloh vyřešte, vyhledejte **správné** řešení z nabídky a vyznačte je **křížkem** v příslušném poli tabulky **záznamového archu**.

max. 3 body

- 13** V každém zápisu 13.1–13.3 vznikne doplněním vhodné trojice číslic čtyřmístné číslo. (Např. v zápise 13.1 je jednou z možností číslo 1204, naopak zápis 0234 je chybný.)

Pro každý zápis (13.1–13.3) určete počet všech různých sudých čtyřmístných čísel, která lze vytvořit. Řešení přiřadte z nabídky (A–E):

13.1 * 2 * * _____

13.2 * * * 2 _____

13.3 2 * * * _____

- A) 425
- B) 450
- C) 500
- D) 900
- E) jiný počet

max. 3 body

- 14** Určete množiny bodů v rovině popsané rovnicemi (14.1–14.3.)
Řešení přiřadte z nabídky (A–E):

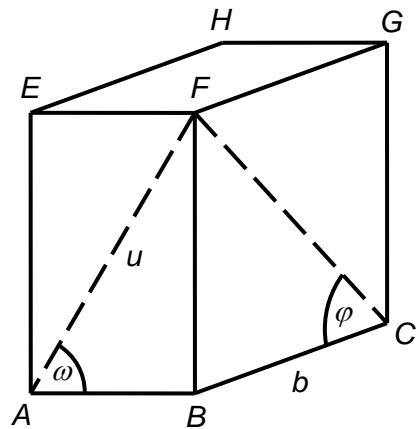
14.1 $\frac{(x+2)^2}{9} - y^2 = 1$ _____

14.2 $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 4$ _____

14.3 $\frac{x+2}{9} + \frac{y}{4} = 1$ _____

- A) Kružnice
- B) Elipsa
- C) Hyperbola
- D) Parabola
- E) Přímka

VÝCHOZÍ OBRÁZEK K ÚLOZE 15



2 body

- 15 Na povrchu kvádru $ABCDEFGH$ jsou vyznačeny stěnové úhlopříčky v přední a boční stěně a úhly, které svírají s hranami dolní podstavy.

Vyjádřete délku úhlopříčky u v závislosti na délce hrany b a velikostech úhlů ω a φ .

- A) $u = b \cdot \frac{\sin \omega}{\operatorname{tg} \varphi}$
- B) $u = b \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \omega}$
- C) $u = b \cdot \frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \omega}$
- D) $u = b \cdot \frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \varphi}$
- E) jiné řešení

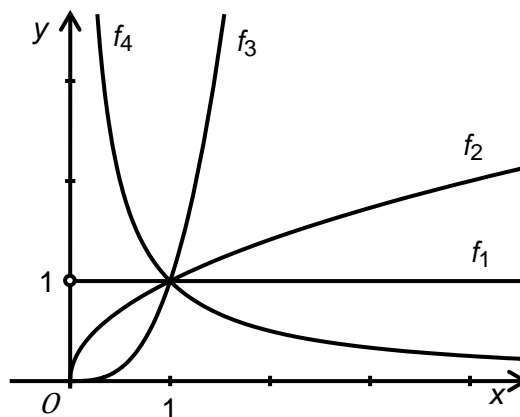
2 body

- 16 V rovnoběžníku $ABCD$ je dán střed souměrnosti $S[2; 0]$ a vektory $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (5; -1)$ a $\vec{d} = \overrightarrow{AD} = (1; 3)$.

Který z uvedených bodů je vrcholem tohoto rovnoběžníku?

- A) $A[-3; -1]$
- B) $B[5; -1]$
- C) $C[5; 1]$
- D) $D[-1; 1]$
- E) žádný z uvedených bodů

VÝCHOZÍ OBRÁZEK K ÚLOZE 17



2 body

- 17 V prvním kvadrantu jsou zobrazeny grafy mocninných funkcí s předpisem $y = x^q$.

Kolik z těchto čtyř funkcí f_1 až f_4 definovaných v intervalu $(0; \infty)$ **nemá** maximum?

- A) jedna
- B) dvě
- C) tři
- D) čtyři
- E) Každá ze čtyř funkcí **má** maximum.

2 body

- 18 Jsou dány funkce f a g s reálnou proměnnou x a nenulovým reálným koeficientem b :

$$f: y = b - x \quad \wedge \quad g: y = \frac{b}{x}$$

Pro které hodnoty koeficientu b platí, že grafy obou funkcí mají právě jeden společný bod?

- A) Podmínku splňuje pouze $b = 0$.
- B) Podmínku splňuje právě jedna reálná hodnota koeficientu b , tato hodnota je kladná.
- C) Podmínku splňuje právě jedna reálná hodnota koeficientu b , tato hodnota je záporná.
- D) Podmínku splňují alespoň dvě různé reálné hodnoty koeficientu b .
- E) Žádná reálná hodnota koeficientu b dané podmínce nevyhovuje.

2 body

- 19** Čtyřboký jehlan má jednu boční hranu kolmou ke čtvercové podstavě. Pět z osmi hran má shodnou délku 1.

Jaký je povrch pláště jehlanu?

- A) $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$
- B) $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
- C) $1 + \sqrt{2}$
- D) $2 \cdot \sqrt{2}$
- E) $2 + \sqrt{2}$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 20

Konzerva je tvaru válce, jehož podstava a plášť mají stejný obsah. Konzerva je uzavřena v co nejmenší papírové krabičce s čtvercovou podstavou.

(CERMAT)

2 body

- 20** V jakém poměru bude výška krabičky a délka podstavné hrany, jestliže tloušťku papíru zanedbáváme?

- A) 1 : 1
- B) 1 : 2
- C) 1 : 3
- D) 1 : 4
- E) 1 : 5

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 21

V první zemi mají 3% roční přírůstek obyvatel. Sousední (druhá) země má sice o pětinu obyvatel méně, ale roční přírůstek obyvatel je 4%.

(CERMAT)

2 body

21 Po kolika letech dostihne v počtu obyvatel druhá země první zemi, pokud se trend s přírůstky obyvatel nezmění?

- A) asi po 18 letech
- B) asi po 20 letech
- C) asi po 21 letech
- D) asi po 22 letech
- E) asi po 23 letech

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 22

Bratři Hynek a Marek získali v dědictví **každý** 1,5 milionu korun. Zvolili různé strategie pro investování této částky. Hynek si pořídil ještě 2 miliony na hypotéku s 12% roční úrokovou mírou a za všechny peníze zakoupil zboží, na kterém za rok vydělal 8,5 % (tj. po odečtení daní). Poté zaplatil půjčku s úrokem. Marek všechny peníze uložil na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 2 % a z úroku zaplatil 15% daň.

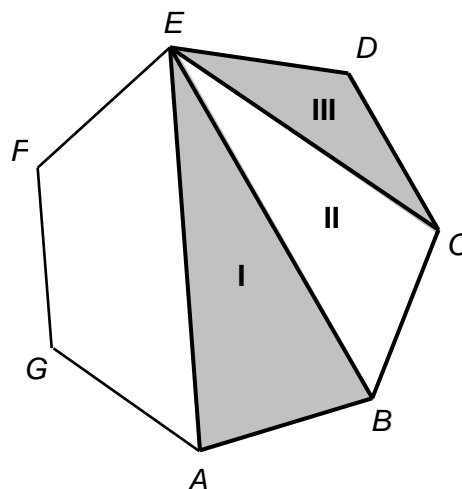
(CERMAT)

2 body

22 Který z bratrů vydělal více?

- A) Hynek měl oproti Markovi výdělek více než dvojnásobný.
- B) Oba výdělky byly srovnatelné.
- C) Hynek vydělal asi o polovinu méně než Marek.
- D) Hynek na rozdíl od Marka nevydělal nic.
- E) Hynek prodělal.

VÝCHOZÍ OBRÁZEK K ÚLOZE 23



max. 3 body

23 V **pravidelném** sedmiúhelníku $ABCDEFG$ jsou vyznačeny tři trojúhelníky: $\triangle ABE$ (I), $\triangle BCE$ (II) a $\triangle CDE$ (III).

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení, je-li pravdivé (ANO), či nikoli (NE):

- | | A | N |
|--|--------------------------|--------------------------|
| 23.1 Kružnice opsané každému ze tří trojúhelníků mají tentýž poloměr. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 23.2 Osy stran ED , EC a EB se protínají ve společném bodě. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 23.3 Všechny tři trojúhelníky mají stejnou velikost vnitřního úhlu při vrcholu E . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.
